

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

SUCEAVA

18 februarie 2023

CLASA a VIII-a

1. Fie numerele reale a și b astfel încât: $a^2 + b^2 - 8a\sqrt{3} - 6b\sqrt{2} + 66 = 0$.

a) (3p) Aflați numerele reale a și b .

b) (4p) Comparați numerele reale c și d , unde $c = \frac{[a] - [b]}{[-a] - [-b]} + \frac{2[-b]^2}{5a}$, iar $d = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$.

Prin $[x]$ se înțelege partea întreagă a numărului real x .

2. a) (2p) Dacă $a, b > 0$, demonstrați că $\frac{2ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{2}$.

b) (5p) Dacă x, y, z sunt numere reale pozitive și $x + y + z = 2023$, arătați că:

$$\frac{x}{x+2023} + \frac{y}{y+2023} + \frac{z}{z+2023} < 1.$$

3. (7p) În cubul ABCDA'B'C'D' punctele M, N și P sunt mijloacele muchiilor BB', C'D' și respectiv C'B'. Calculați sinusul unghiului format de dreptele AM și NP.

4. (7p) O piramidă SABCD are baza paralelogram. Pe segmentele SB, SC și SD luăm punctele M, N, respectiv P astfel încât $SM = 2MB$, $SN = NC$ și $SP = 2PD$. Arătați că punctele A, M, N, P sunt coplanare.

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.

2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.

3. Timp de lucru 3 ore.